A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT
LISTA 15

Galowice, 18 marca 2013

ZADANIE 1. Niech $\mathcal{A}$ będzie pewną przestrzenią liniową funkcji rzeczywistych na przestrzeni X. Udowodnij, że $\mathcal{A}$ wraz z każdą funkcją f zawiera jej moduł $|f|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest zamknięta na operacje kratowe $f \vee g$ i $f \wedge g$ oznaczające maksimum i minimum funkcji.

ZADANIE 2. Niech T oznacza operator liniowy ciągły z $CB(X)$ w $CB(Y)$, gdzie X i Y są przestrzeniami topologicznymi, a $CB(X)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji rzeczywistych ciągłych i ograniczonych na X ($CB(Y)$ – analogicznie). Udowodnij, że jeśli T przeprowadza funkcję stale równą 1 (na X) na funkcję stale równą 1 (na Y) i jest multyplikatywny (tzn. zachowuje iloczyny: $T(fg) = T(f)T(g)$), to T zachowuje operacje kratowe oraz moduł. Wykaż, że wtedy operator jest *nieujemny* (tzn. $f \geq 0 \implies T(f) \geq 0$).

ZADANIE 3. Niech $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ i $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ będą przestrzeniami miarowymi. Niech T oznacza operator liniowy ograniczony z przestrzeni $L^1(\mu)$ w $L^1(\nu)$, który zachowuje funkcję stale równą jeden. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
(a) T zachowuje operacje kratowe.
(b) T zachowuje moduł.
(c) T przeprowadza funkcje charakterystyczne zbiorów na funkcje charakterystyczne zbiorów (czyli na funkcje przyjmujące ν-prawie wszędzie tylko dwie wartości 0 i 1). Sprawdź, że wtedy zachowywane są działania na zbiorach (suma, przekrój, dopełnienie).
(c) T jest multyplikatywny (z dokładnością do miary ν).
(d) T jest postaci $T(f) = f \circ \pi$, gdzie $\pi : Y \to X$ jest transformacją mierzalną.
(ostatnie zrobić przy założeniu, że X jest odcinkiem z miarą Lebesgue'a).

Tomasz Downarowicz